الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Centeral Tendency

الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Centeral Tendency

هي تلك المقاييس التي تبحث في تقدير قيمة تتمركز حولها أغلبية البيانـات وبحيث تمثلها أفضل تمثيل ومن مقاييس النزعة المركزية:

1) **الوسط الحسابي** The Arithematic Mean:

يعتبر الوسط الحسابي من أكثر مقاييس النزعـة المركزيـة اسـتعمالاً لكونـه يستعمل جميع البيانات.

ويعرف الوسط الحسابي: مجموع هذه المشاهدات مقسوماً على عددها.

1-1 **الوسط الحسابي للقيم غير المبوبة أو البيانات الخام** Raw Data

الوسط الحسابي ($\overline{X}$) هو مجموع القيم مقسوماً على عددها.

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم (n) (المشاهدات):

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots X_n}{n}$$

(n) للقيم من i = 1, 2 ..... n (عدد القيم)

ويمكن استعمال Σ (سيغما) ويعني جمع الحدود التي في داخله.

ولذلك تكون معادلة الوسط الحسابي هي:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi}{n} \Big/ \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} Xi / n$$

مثال: احسب الوسط الحسابي للبيانات التالية:

$$(10, 5, 15, 20, 8, 2)$$

الحل:

$$\overline{X} = \frac{10+5+15+20+8+2}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

مثال: أوجد الوسط الحسابي للمعادلة التالي:

$$\sum_{i=1}^{3}(2i+2) \Big/ n$$

الحل:

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}(2i+2)}{n} = \frac{(2\times1+2)+(2\times2+2)+(2\times3+2)}{3}$$

$$\overline{X} = \frac{4+6+8}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

2–1 الوسط الحسابي من القيم المبوبة (Grouped Data)

(التوزيع التكراري) فإن الوسط الحسابي يكون:

$$\overline{X} = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots\dots\dots + X_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots\dots\dots + f_n}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xifi}{\sum f}$$

وحيث n = مجموع التكرارات.

مثال: أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الذي يمثل علامات 20 طالباً والعلامة القصوى هي 25 والتوزيع كما يلي:

العلامة	5	10	15	20	25
عدد الطلاب	8	3	2	3	4

الحل:

العلامة Xi	عدد الطلاب fi	Xifi
5	8	40
10	3	30
15	2	30
20	3	60
25	4	100
المجموع	20	260

$$\overline{X} = \frac{\sum Xifi}{\sum f} = \frac{260}{20} = 13$$

ولهذا فإن الوسط الحسابي لعلامات الطلبة هو 13.

مثال: جد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار (fi)
10 – 14	8
15 – 19	15
20 – 24	10
25 – 29	9
30 – 34	5

الحل:

نكون جدول جديد يشمل (Xi) مركز الفئات، (Xifi) والذي يمثل حواصل ضرب مراكز الفئات والتكرارات المقابلة لها ويكون لدينا الجدول التالي:

الفئات	التكرار fi	مراكز الفئات Xi	Xifi
10 - 14	8	12	96
15 - 19	15	17	255
20 - 24	10	22	220
25 - 29	9	27	243
30 - 34	5	32	160
المجموع	47		974

$$\bar{X} = \frac{\sum Xifi}{\sum f} = \frac{974}{47} = 20.7$$

3-1 **الوسط الحسابي المرجح (الموزون)** The weighted mean:

يفيد هذا المفهوم في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عينات مختلفة.

إذا كان لدينا المجموعات التي أحجامها على التوالي:

$n_1, n_2, \ldots\ldots n_r.$

وأوساطها الحسابية على التوالي: $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots\ldots\ldots \bar{X}_r$

فإن الوسط الحسابي المرجح لهذه المجموعات يكون:

$$\bar{X} = \frac{n_1 X_1 + n_2 X_2 + \ldots\ldots + n_r X_r}{n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_r}$$

مثال: إذا كان لدينا المجموعتان (أ) وحجمها (20) مشاهدة ووسطها الحسابي (45) والمجموعة (ب) وحجمها (30) ووسطها الحسابي (50) فإن الوسط الحسابي المرجح للمجموعتين معاً يكون؟؟

الحل:

$$\bar{X} = \frac{(20 \times 45) + (30 \times 50)}{20 + 30}$$

$$= \frac{900 + 1500}{50}$$

$$= \frac{2400}{50} = 48$$

مثال: جد الوسط الحسابي المرجح للمجموعتان (x, y) حيث:

15, 10, 8, 26, 16 = x

4, 15, 10, 8, 16, 7 = y

الحل:

$$\bar{X} = \frac{16+26+8+10+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$\bar{X} = 15$
$n = 5$

$$\bar{y} = \frac{7+16+8+10+5+4}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$n = 6$
$\bar{y} = 10$

الوسط الحسابي المرجح:

$$= \frac{(15\times5)+(10\times6)}{5+6}$$

$$= \frac{75+60}{11} = \frac{135}{11} = 12.3$$

2) الوسيط Median:

نرمز للوسيط بالرمز (M) وهوالمقياس الثاني من مقاييس النزعة المركزية في الأهمية. ويعرف بأنه القيمة التي يكون عدد القيم الأقل منها يساوي عدد القيم الأكبر منها. ويحسب إذا تم ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً والوسيط يكون القيمة التي تقع في وسط البيانات وتعتبر هذه ميزة كونه لا يتأثر بالقيم الكبيرة أو الصغيرة (القيمة الشاذة).

ويمكن حسابه في حالة القيم المفردة أو البيانات المبوبة في الجداول التكرارية.

2–1 الوسيط من البيانات المفردة (غير المبوبة):

أ) في حالة القيم المفردة: عدد القيم أو البيانات فردي نتبع الخطوات التالية لحساب الوسيط:

1 – نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً.

2 – نجد رتبة الوسيط = $\frac{n+1}{2}$ حيث n عدد القيم.

3 – الوسيط يساوي القيمة المقابلة للرتبة.

مثال: جد الوسيط للبيانات التالية:

6, 9, 8, 15, 10, 12, 16

الحل:

إن عدد البيانات فردياً وبعد ترتيبها تصاعدياً تكون:

القيم	6,	8,	9,	$\boxed{10,}$	12,	15,	16
الرتب	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7

نجد رتبة الوسيط = $\frac{7+1}{2} = 4$

إذاً رتبة الوسيط تساوي 4 فالوسيط يكون القيمة المقابلة للرتبة 4 ويكون (μ) = 10

ب) في حالة القيم الزوجية: عدد القيم أو البيانات زوجياً نتبع نفس خطوات البيانات المفردة ولكن يكون هناك رتبتان للوسيط.

مثال: ما هو الوسيط للقيم التالية: 100, 60, 80, 120, 90, 110

الحل:

إن عدد البيانات زوجياً وبعد ترتيبها تصاعدياً تكون:

القيم 60, 80, 90, 100, 110, 120

الرتب 1 2 3 4 5 6

نجد رتبة الوسيط $= \frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$

$\frac{6}{2}=\boxed{3}$ و $\frac{6}{2}+1=\boxed{4}$

إذاً القيمة المقابلة للرتبة 3 هي 90 والقيمة المقابلة للرتبة 4 هي 100 وبالتالي الوسيط يكون:

$$\mu = \frac{90+100}{2} = \frac{190}{2} = 95$$

2-2 الوسيط للبيانات المبوبة:

بما أن كثير من البيانات يتم عرضها بواسطة التوزيع التكراري فإن الفئة التي تقابل رتبة الوسيط والتي تساوي نصف مجموع التكرارات في جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد، وتسمى فئة الوسيط (Medianclass) أو الفئة الوسيطية ويمكن إيجاد قيمة الوسيط باستعمال القانون التالي:

$$M = a + \left[\frac{\frac{\sum fi}{2} - F}{f}\right] \times C$$

$$M = a + \left[\frac{\frac{n}{2} - n_1}{fm}\right] \times C$$

حيث: $\frac{n}{2}$: تمثل رتبة الوسيط، (n) مجموع التكرار.

A تمثل الحد الأدنى الفعلي لفئة الوسيط.

C: تمثل طول الفئة الوسيطية.

fm: تمثل تكرار الفئة الوسيطية.

n_1: تمثل التكرار المتجمع الصاعد (السابق) الرتبة الوسيط.

n_2: تمثل التكرار المتجمع الصاعد (اللاحق) لرتبة الوسيط.

$fm = n_2 - n_1$

مثال: أوجد الوسيط لجدول التوزيع التكراري التالي والذي يمثل أعمار 50 شخصاً.

الفئات (الأعمار)	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
التكرار	7	10	4	12	17

الحل:

نضيف عمودين الأول الحدود الفعلية العليا والثاني التكرار المتجمع الصاعد ويصبح الجدول الجديد كما يلي:

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية العليا	التكرار المتجمع الصاعد
30 – 34	7	34.5	7
35 – 39	10	39.5	17
40 – 44	4	a = 44.5	21
45 – 49	12	c = 49.5	fm=12 33
50 – 54	17	54.5	50
المجموع	50		

ومن ثم نجد رتبة الوسيط:

$$\frac{n}{2}=\frac{50}{2}=\boxed{25}$$

$$\frac{n}{2}=25$$

وحيث إن رتبة الوسيط (25) تقع في التكرار المتجمع الصاعد أكبر من (21) وأصغر من (33) فإذاً الحدود الفعلية لرتبة الوسيط هي (44.5 – 49.5) وفي هذه الحالة (a) تكون (44.5) الحد الفعلي الأدنى لفئة الوسيطية.(C) تكون (49.5 – 44.5) = 5 طول الفئة الوسيطية (n_1) تكون (21)، (n_2) تكون (33)، لأن رتبة الوسيط تقع بين هذين الرقمين إذاً:

$$fm = 33 - 21 = 12$$

والآن نطبق قانون الوسيط:

$$\mu = 44.5 + \left[\frac{25-21}{12}\right]\times 5$$

$$= 44.5 + \frac{4}{12}\times 5$$

$$= 44.5 + \frac{20}{12}$$

$$= 44.5 + 1.7$$

$$= 46.2$$

مثال: جد الوسيط لأوزان أمتعة (30) مسافر.

المسافرين التكرار	الأوزان الحدود الفعلية
5	10.5 – 15.5
6	15.5 – 20.5
7	20.5 – 25.5
8	25.5 – 30.5
4	30.5 – 35.5

الحل:

التكرار	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد	
5	10.5 – 15.5	5	
6	15.5 – 20.5	11	(n_1)
7	(a) $\boxed{20.5}$ – 25.5	18	15 رتبة الوسيط
8	25.5 – 30.5	26	(n_2)
4	30.5 – 35.5	30	
30			

رتبة الوسيط $= \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

والفئة الوسيطة (20.5 – 25.5) إذاً (a = 20.5).

$C = 5$، $n_1 = 11$، $fm = 7$، $18 - 11$

وبالتالي الوسيط يكون:

$$\mu = 20.5 + \frac{15-11}{7}\times 5$$

$$= 20.5 + 2.86$$

$$= 23.36$$

3) المنوال The Mode:

المقياس الثالث من مقاييس النزعة المركزية هو المنوال وهو القيمة الأكثر تكراراً بين قيم المشاهدات. مع أخذ الملاحظات التالية بعين الاعتبار:

- يمكن أن يكون هناك منوال واحد.
- إذا لم يتكرر أي عدد نقول لا يوجد منوال.
- يمكن أن يكون هناك أكثر من منوال.
- إذا تكررت جميع القيم نفس عدد المرات فلا يوجد منوال.

1–3 **المنوال من البيانات غير المبوبة**:

هو القيمة الأكثر تكراراً بين القيم في المجموعة.

مثال1: جد المنوال للبيانات التالية:

8, 15, 8, 17, 12, 11, 20, 8, 15, 8

الحل: المنوال (Mode) هو رقم (8) (القيمة تكررت أكثر من غيرها).

مثال2: جد المنوال للبيانات التالية: 10, 8, 2, 5, 4, 16, 13

الحل: لا يوجد منوال (جميع القيم تكررت مرة واحدة).

مثال3: جد المنوال للبيانات التالية: 6, 3, 4, 10, 6, 11, 10

الحل: يوجد قيمتين للمنوال وهما (10, 6) (لا يوجد أكثر من منوال).

مثال4: جد المنوال للبيانات التالية: 2, 4, 6, 2, 4, 6

الحل: لا يوجد منوال (جميع البيانات تكررت نفس عدد المرات).

2–3 **المنوال للبيانات المبوبة** The Mode of Grouped Data

المنوال في التوزيع التكراري تكون الفئة التي يقابلها أعلى تكرار تسمى الفئة المنوالية.

مثال: جد المنوال من الجدول التكراري التالي:

الراتب	100	150	220	400
التكرار (عدد العمال)	5	8	4	5

الحل:

المنوال هو 150، القيمة المقابلة لأعلى تكرار وهو 8.

أما في التوزيع التكراري ذي الفئات فإن المنوال هو مركز الفئة المقابلة لأعلى تكرار.

مثال: جد المنوال التكراري التالي:

عدد الفئات	التكرار
10 – 18	4
19 – 27	6
28 – 36	3
37 – 45	2

الحل:

المنوال هو مركز الفئة المقابل لأعلى تكرار وبما أن أعلى تكرار هو (6) فإن الفئة المنوالية هي (19 – 27) ومركزها يكون $\boxed{23} = \frac{19+27}{2}$.

إذاً المنوال يساوي (23).

كما يمكن إيجاد المنوال بطريقة الفروق لبيرسون وحسب الصيغة التالية:

$$\mu_o = a + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right] \times C$$

مثال: أوجد المنوال في الجدول التكراري التالي:

الفئات	5 – 10	11 – 16	17 – 22	23 – 28
التكرار	4	8	12	2

الحل:

نكون الجدول على الفئات الفعلية وكما يلي:

الحدود الفعلية	التكرار	
4.5 – 10.5	4	
10.5 – 16.5	8	
16.5 – 22.5	12	← الفئة المنوالية المقابلة لأعلى تكرار
22.5 – 28.5	2	

الفئة المنوالية وهي (16.5 – 22.5) وحيث (a) تساوي الحد الأدنى للفئة المنوالية فإذاً (a = 16.5).

نجد (d_1) (First difference) الفرق الأول = (4) = 8 – 12.

نجد (d_2) (Second difference) الفرق الثاني = (10) = 2 – 12.

ثم نجد المنوال حسب الصيغة المذكورة سابقاً:

$$\begin{aligned} Mode &= 16.5 + \frac{4}{4+10} \times 6 \\ &= 16.5 + \frac{4}{14} \times 6 \\ &= 16.5 + \frac{24}{14} \\ &= 16.5 + 1.7 \\ &= 18.2 \end{aligned}$$

خصائص الوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

خصائص الوسط الحسابي:

1. سهل الحساب وأكثر مقاييس النزعة المركزية استعمالاً.
2. يأخذ بعين الاعتبار جميع قيم المشاهدات ذات العلاقة:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

3. مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً

$$\sum (X_i - \overline{X}) = 0$$

مثال: إذا كانت لدينا البيانات التالية (2, 3, 7) أثبت أن مجموع انحرافات البيانات (القيم) عن وسطها الحسابي يساوي صفراً.

الحل:

نجد الوسط الحسابي $\overline{X} = \frac{2+3+7}{3} = 4$

$$=(2-4)+(3-4)+(4-7)=0$$

$$=(-2)+(-1)+(3)=0$$

4. يتأثر بالقيم المتطرفة:

مثال: أوجد الوسط الحسابي للبيانات التالية (30, 10, 20, 1200)

الحل:

الوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{30+10+20+1200}{4} = \frac{1260}{4} = 315$$

وهذا العدد بعيد جداً عن باقي قيم المشاهدات وهذا بسبب القيمة المتطرفة 1200.

5. عند إضافة أو طرح أو قسمة أو ضرب عدد ثابت إلى جميع المشاهدات فإننا كذلك نفعل بالنسبة للوسط الحسابي.

مثال: أوجد الوسط الحسابي للقيم التالية: (10, 20, 30)

الحل:

الوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{10+20+30}{3} = 20$$

- إذا أضفنا العدد (5) لجميع القيم لتصبح كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{15+25+35}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

فيمكن مباشرة إضافة العدد 5 + 20 = 25

- وإذا طرحنا العدد (5) من المثال أعلاه فيكون الوسط الحسابي الجديد = $20 - 5 = 15$
- وإذا ضربنا العدد (5) في جميع قيم نفس المثال فيكون الوسط الحسابي الجديد = $20 \times 5 = 100$
- وإذا قسمنا العدد (5) على قيم نفس المثال فيكون الوسط الحسابي الجديد يساوي $\frac{20}{5} = 4$

خصائص الوسيط:

1. الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال: أوجد الوسيط لقيم المشاهدات التالية:

15, 20, 30, 45, 290

رتبة الوسيط تكون: $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \boxed{3}$

القيمة المقابلة للرتبة (3) هي (30) إذاً الوسيط هو (30) ونلاحظ أن القيمة المتطرفة (290) لم تؤثر على قيمة الوسيط.

2. يتأثر بعدد القيم والمشاهدات.

إذا حذفنا القيمتان الرابعة والخامسة من المثال السابق أعلاه تصبح رتبة الوسيط $\boxed{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

وقيمة الوسيط تساوي (20).

3. يأخذ بعين الاعتبار موقع القيم وليس متوسطها.
4. يمكن إيجاده من الجداول المفتوحة.
5. يمكن إيجاده بيانياً.

خصائص المنوال:

1. يمكن إيجاده بسهولة لكن قليل الاستخدام.
2. لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال: أوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية:

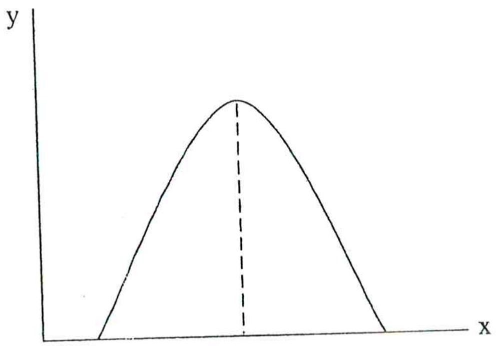
2, 6, 10, 50, 10, 300

الحل: المنوال يساوي (10) القيمة الأكثر تكراراً ولميتأثر بالقيمة المتطرفة (300).

3. يمكن إيجاده من الجداول المتفوحة.
4. يمكن إيجاده بيانياً.

العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

- في التوزيعات وحيدة المنوال والمتماثلة فإن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تنطبق على بعضها البعض. مثل الشكل التالي:



$\overline{X} = \mu = Mode$

- في التوزيعات التكرارية أحادية المنوال والملتوية إلتواء بسيط فإن الوسيط يقع في الوسط ما بين الوسط الحسابي والمنوال. وتكون العلاقة بالصيغة التالية.

$$\overline{X} - \text{mod}\,e = 3(\overline{X} - \mu)$$

مثال: إذا كان الوسط الحسابي (30) والوسيط (28)، أوجد المنوال.

الحل:

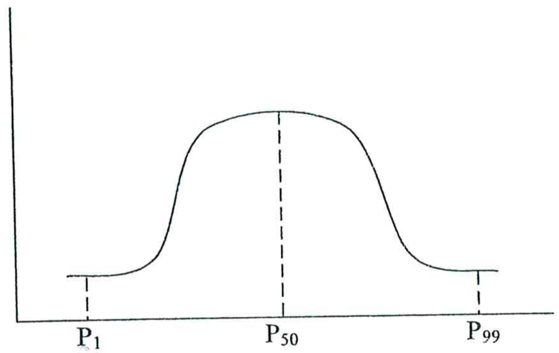
$$30 - \text{mod}\,e = 3(30 - 28)$$
$$30 - \text{mod}\,e = 3(2)$$
$$30 - \text{mod}\,e = 6$$
$$\text{mod}\,e = 30 - 6$$
$$\text{mod}\,e = 24$$

- في التوزيعات وحيدة المنوال والملتوية التواءً بسيط نحو اليمين فإن العلاقة تكون المنوال أكبر من الوسيط أكبر من الوسط الحسابي.

4) المئينات والرتب المئينية Percentiles

نحتاج في كثير من الأوقات لمعرفة نسبة البيانات التي تقع أو تزيد عن قيمة معينة أو تساويها. عندما نقسم المساحة أو البيانات إلى 100 جزء متساوية يسمى بالمئينات فالمئين الأول (P_1) هو القيمةالتي يسبقها 1٪ من البيانات ويليها 99٪ من البيانات وعلى فرض أن القيم مرتبة ترتيباً تصاعدياً. والمئين (40) (P_{40}) هو القيمة التي يسبقها 40٪ من البيانات ويليها 60٪ من البيانات. وهذه التقسيمات لها استخدامات كثيرة فمثلاً يمكن تقسيم مجموعة من العمال حسب الدخول ويمكن تحديد موقع كل عامل في هذه المجموعة.

أما المئين خمسون (P_{50}) فهو القيمة التي تقسم البيانات إلى قسمين بحيث يكون نصف البيانات أقل من تلك القيمة أو تساويها، والنصف الآخر يكون أعلى من تلك القيمة أو تساويها. والشكل التالي يوضح مفهوم المئينات حيث المساحة تحت المنحنى وعلى كل جزء تساوي $\frac{1}{100}$ من المساحة الكلية.



علماً بأن المئين خمسون (P50) يساوي الوسيط يساوي الربع الثاني (Q_2) ويساوي العشر الخامس (D_5).

وبعد ترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً فإن المئين يرمز له بالرمز (Pk) وحتى نستطيع التعرف على كيفية إيجاد المئين لا بد من تفسير ذلك في حالة البيانات غير المبوبة والبيانات المبوبة.

4-1 المئينات من البيانات غير المبوبة:

إذا كانت البيانات غير مبوبة تتبع الخطوات التالية من أجل إيجاد المئينات:

- نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً.
- نجد رتبة المئين من العلاقة التالية:

$$P_k = \frac{k}{100}\times n+1$$

- نجد موقع المئين ثم نجد قيمة المئين المناظرة لموقعه.

مثال: البيانات التالية تمثل أجور خمسة عمال في مصنع ما والمطلوب حساب المئين ثلاثون لهذه الأجور. (200, 350, 250, 300, 400)

الحل: نرتب الأجور ترتيباً تصاعدياً ونمنحها رتباً:

الأجور	200	250	300	350	400
رتب الأجور	1	2	3	4	5

ومن ثم نجد رتبة (P_{30}):

$$P_{30} = \left(\frac{k}{100}\times n+1\right)$$

$$P_{30} = \frac{30}{100}\times 5+1$$

وهي رتبة المئين 30 (P_{30}) $=1.8$

وتقع هذه الرتبة بين الرتبة (1) والرتبة (2).

نجد القيمة المناظرة للرتبتين الأولى والثانية وهما 200, 250. فتكون قيمة المئين ثلاثون هي:

$$P_{30} = \frac{200+250}{2} = 225$$

وتفسير ذلك أن 30٪ من الأجور تقل عن 225 دينار وأن 70٪ من الأجور تزيد عن 225 دينار.

4-2 المئينات في البيانات المبوبة:

إن طريقة إيجاد المئينات في التوزيعات التكرارية هي نفس طريقة الوسيط، وذلك بإيجاد التوزيع التكراري المتجمع ثم فئة المئين وهي أول فئة يزيد تكرارها المتجمع على أو يساوي $\left(\frac{k}{100}\times n\right)$ حيث (n) تساوي مجموع التكرارات. ومن ثم نعين الحد الأدنى لفئة المئين (k) ونعبر عنه بالرمز (a) ونستعمل صيغة المعادلة التالية:

$$P_k = a+\frac{\frac{k}{100}\times n-n_1}{f}\times C$$

حيث:

a : تمثل الحد الأدنى لفئة المئين.

$\left(\frac{k}{100}\times n\right)$: تمثل رتبة المئين.

n_1 : تمثل التكرار المتجمع السابق للفئة المئينية.

f : تمثل تكرار فئة المئين.

C : تمثل طول الفئة المئينية.

مثال: لدينا التوزيع التكراري التالي والذي يمثل أعمار 80 شخصاً والمطلوب حساب P_{20}.

الفئات	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
التكرار	5	7	11	25	17	9	6

الحل:

نكون الجدول التالي:

الفئات	التكرار f	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
6 – 10	5	5.5 – 10.5	5
11 – 15	7	10.5 – 15.5	12
16 – 20	11	15.5 – 20.5	23
21 – 25	25	20.5 – 25.5	48
26 – 30	17	25.5 – 30.5	65
31 – 35	9	30.5 – 35.5	74
36 – 40	6	35.5 – 40.5	80
المجموع	80		

- نجد رتبة المئين عشرون $P_{20} = \frac{20}{100} \times 80 = 16$
- نجد فئة المئين عشرون (20.5 – 15.5) مقابلالتكرار الصاعدوتساوي (0.1) أكبر من الرتبة (16).

إذاً:

$12 = n_1$ ، $16 = \frac{20}{100} \times 80$ ، $15.5 = a$

$20.5 - 15.5 = 5 = C$ ، $11 = f$

نطبق القانون:

$$P_{20} = 15.5 + \frac{16-12}{11} \times 5$$

$$P_{20} = 15.5 + 1.8 = 17.3$$

وتفسيرذلك أن 20٪ من الأشخاص أعمارهم تقل عن 17.5 سنة وأن 80٪ من الأشخاص أعمارهم تزيد عن 17.3 سنة.

إيجاد (P_{60}) لنفسمعطيات المثال السابق:

نجد رتبة المئين ستون = $\frac{60}{100} \times 80 = 48$.

إذاً الرتبة (48) جاءت مطابقة لأحد التكرارات المتجمعة الصاعدة وهو (48) في هذه الحالة فإن (P_{60}) يساوي نهاية الفئة المناظرة للتكرار المتجمع الصاعد (48) ويساوي (25).

وحتى نستطيع إيجاد (P_1) نجد رتبة المئين الأول $0.8 = \frac{1}{100} \times 80$.

وهذه الرتبة أقل من التكرار الموجود للفئة الأولى وهو (5) في هذه الحالة لا يمكن إيجاد (P1) إلا إذا أضفنا فئة سابقة لأول فئة ويكون تكرارها صفراً ومن ثم نتبع نفس الخطوات السابقة.

الربعيات والعشيرات Quartiles and Deciles

هذه تقسيمات تفيد في دراسات عديدة مجالات أخرى فالربيعات تعني تقسيم المساحة إلى أربعة أجزء متساوية أو تقسيم المساحة إلى عشرة أجزاء متساوية.

الربيعات Quartiles:

القيم التي تقسم توزيع البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية تعرف على أنها الربيعات.

- الربيع الأول: (الربع الأدنى) هو القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويليها ثلاثة أرباع البيانات ويرمز له بالرمز (Q_1).
- الربيع الثاني: له نفس قيمة الوسيط P_{50}، D_5 (العشر الخاص) وهو القمية التي يسبقها نصف البيانات النصف الآخر ويرمز لها ويليها (Q_2).
- الربع الثالث: (الربع الأعلى) وهو القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع ويليها ربع البيانات ويرمز له (Q_3).

الربيعات في البيانات غير المبوبة:

مثال: البيانات التالية تمثل أجور تسعة موظفين وهي كما يلي:

240, 190, 250, 200, 220, 150, 170, 160, 180

المطلوب: حساب Q_3, Q_2, Q_1

الحل:

نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً ونعطيها رتباً:

150	160	170	180	190	200	220	240	250
1	2	3	4	5	6	7	8	9

لإيجاد $P_{25} = Q_1$ إذن رتبة $\frac{25}{100}\times 9+1 = \boxed{2.5} = Q_1$

رتبة الربع الأول $Q_1 = 2.5$ أكبر من 2 وأصغر من 3 فالقيمة المقابلة للرتب هي $= \frac{160+170}{2} = 165$ دينار.

لإيجاد الربع الثاني $P_{50} = Q_2$ رتبة $P_{50} = Q_2$ $\frac{50}{100}\times 10 = 5$

إذاً الربع الثاني Q_2= القيمة المقابلة للرتبة 5 وهي 190.

الربع الثالث (الربع الأعلى) $= Q_3 = P_{75}$

إذاً الرتبة $Q_3 = \frac{75}{100}\times 10 = 7.5$

إذاً الرتبة 7.5 تقع ما بين الرتبة السابعة والثامنة

إذاً القيمة المقابلة لها هي $\boxed{230} = \frac{220+240}{2}$

ونلاحظ هنا أننا نستخدم نفس طريقة المئينات ولكن أولاً يجب تحويل الربيعات المطلوبة إلى مئينات علماً بأن:

$$P_{75} = Q_3,\quad P_{50} = Q_2,\quad P_{25} = Q_1$$

الربيعات في البيانات المبوبة:

مثال: إذا كان لديك التوزيع التكراري والذي يمثل علامات 60 طالباً والتوزيع كما يلي:

الفئات	22–26	27–31	32–36	37–41	42–46	47–51
التكرار	10	8	12	9	13	8

والمطلوب: حساب Q_1، Q_2

الحل:

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
22 – 26	10	22.5 – 26.5	10
27 – 31	8	26.5 – 31.5	18
32 – 36	12	31.5 – 36.5	30
37 – 41	9	36.5 – 41.5	39
42 – 46	13	41.5 – 46.5	52
47 – 51	8	46.5 – 51.5	60
المجموع	60		

لإيجاد Q_1 والذي يساوي P_{25}

نجد رتبة $Q_1 = P_{25} = 15 = 60 \times \frac{25}{100}$

الرتبة 15 تقع في التكرار المتجمع الصاعد بين 10, 18.

$a = 26.5, \quad n_1 = 10, \quad f = 8, \quad c = 5$

$$Q_1 = P_{25} = 26.5 + \frac{15-10}{8} \times 5$$

$$Q_1 = 26.5 + 3.125 = 29.6$$

لإيجاد الربع الثاني = $Q_2 = P_{50}$

رتبة الربع الثاني:

$$\frac{50}{100} \times 60 = 30$$

أو:

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 30$$

وحيث أن الرتبة 30 تقع مقابل التكرار الصاعد 30 إذاً $Q_2 = 36.5$

العشيرات Deciles

وهي القيم التي تقسم البيانات المرتبة إلى عشرة أقسام متساوية وهي القيم: $D_1, D_2, \ldots\ldots, D_9$ ، فالعشر الأدنى هو العشر الأول D_1، والعشر الأعلى هو العشر التاسع D_9.

حساب العشيرات في البيانات غير المبوبة:

البيانات التالية تمثل علامات سبعة طلاب والمطلوب حساب العشير الثلاث (D_3) والعشير السابع (D_7) والبيانات كما يلي:

10, 15, 20, 12, 13, 15, 18, 20

نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً:

10, 11, 12, 13, 15, 18, 20

1 2 3 4 5 6 7

نجد رتبت العشير الثالث $D_3 = P_{30} = \boxed{2.4} = \frac{30}{100} \times 8$

والرتبة 2.4 تقع بين 2 – 3

فنأخذ القيم المقابلة لها:

$$D_3 = \frac{11+12}{2} = 11.5$$

ولإيجاد العشير السابع $D_7 = P_{70}$

نجد رتبة D_7:

$$\frac{70}{100} \times 8 = \boxed{5.6}$$

والرتبة لـ D_7 تقع بين 5 و 6

نأخذ القيم المقابلة لها فيكون D_7:

$$D_7 = \frac{15+18}{2} = 16.5$$

العشيرات في التوزيع التكراري:

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
22 – 26	10	22.5 – 26.5	10
27 – 31	8	26.5 – 31.5	18
32 – 36	12	31.5 – 36.5	30
37 – 41	9	36.5 – 41.5	39
42 – 46	13	41.5 – 46.5	52
47 – 51	8	46.5 – 51.5	60
المجموع	60		

المطلوب: حساب العشير السادس D_6.

نجد رتبة $D_6 = P_{60} = \frac{60}{100} \times 60 = 36$

$a = 36.5, \quad n_1 = 30, \quad f = 9, \quad c = 5$

$$\therefore D_6 = P_{60} = 36.5 + \frac{36-30}{9} \times 5$$

$$= 36.5 + \frac{6}{9} \times 5$$

$$= 36.5 + \frac{30}{9}$$

$$= 36.5 + 3.33 = 39.83$$

تمارين الفصل الثالث

1. البيانات التالية تمثل أجور مجموعة من العمال في إحدى المصانع وهي كما يلي:

180, 420, 250, 500, 300, 400
175, 195, 190, 200, 350, 150

والمطلوب:

أ. حساب الوسط الحسابي لأجور العمال.

ب. حساب الوسيط

2. الجدول التالي يمثل أوزان مجموعة من الأطفال.

فئات الأوزان	عدد الأطفال F
10 – 4	12
16 – 11	10
22 – 17	23
28 – 23	8

المطلوب:

أ. حساب الوسط الحسابي لأوزان الأطفال.

ب. حساب الوسيط.

ج. حساب المنوال.

د. أوجد العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

3. أوجد الوسط الحسابي المرجح لأجور عمال في مصنعين وبياناتهما كما يلي:

المصنع الأول الوسط الحسابي للأجور 450 وعدد العمال 120.

المصنع الثاني الوسط الحسابي للأجور 350 وعدد العمال 70.